APRIL/MAY 2025

FMA52/CMA52/BMA52 —
REAL ANALYSIS – I

Time : Three hours | Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Define bounded below and bounded above.
கீழ் சார்பு மற்றும் மேல் சார்பு வரையறு.

2. Define convergent and divergent.
ஒருங்கு தொடர் மற்றும் விரிதொடர் வரையறு.

3. Define monotonic sequence.
ஏகபோக வரிசை வரையறு.

4. Define Cauchy sequence.
காச்சி வரிசை வரையறு.



5. Define conditionally convergent.
கட்டுப்பாட்டு ஒருங்கிணைப்பை வரையறு.

6. Define partial sum of the series.
ஒரு வரிசையின் பகுதி கூடுதலை வரையறு.

7. Is $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots$ converges. Justify.

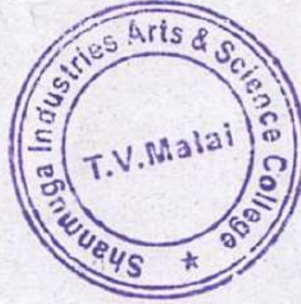
$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\ldots$ ஒருங்கிணைந்தவை எனக் காட்டுக.

8. Define l^2.

l^2 ஐ வரையறு.

9. Define dense.

அடர்த்தி வரையறு.



10. Define homeomorphic.

ஹோமோமார்பிக் வரையறு.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) If $A_1, A_2, \ldots$ are countable sets. Prove that $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ is countable.

$A_1, A_2, \ldots$ கணக்கிடக்கூடிய தொகுப்புகள் என்றால் $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ என்பது கணக்கிடக்கூடியது. தொகுப்பின் ஒன்றியம் எண்ணத்தக்கது.

Or

19. Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converges.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ஒருங்கு தொடர் வரிசையை நிரூபிக்கவும்.

20. Prove that $g \circ f$ is continuous at a if f and g are real valued function and f is continuous at a and g is continuous at $f(a)$.

$g \circ f$ a யில் தொடர்ச்சியானது என நிரூபி f மற்றும் g மெய்யெண்களின் சார்பு மற்றும் f என்பது a யில் தொடர்ச்சி மற்றும் g என்பது $f(a)$ ல் தொடர்ச்சி ஆகும்.



(b) If B is an infinite subset of the countable set A prove that B is countable.

B என்பது எண்ணக்கூடிய தொகுப்பு A யின் எல்லையற்ற துணைக்குழு எனில் B எண்ணத்தக்கது.

12. (a) Prove that $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to 0. If $0 < x < 1$.

$0 < x < 1$ என்றால் $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 0 இல் ஒருங்கிணைந்த தொடராகிறது.

Or

(b) Prove that $\lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = L - M$ if $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ and $\lim_{n\to\infty} t_n = M$.

$\lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = L - M$ ஐ நிரூபி $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ மற்றும் $\lim_{n\to\infty} t_n = M$ எனில்.

13. (a) State and prove root test.

ரூட் சோதனை தேற்றத்தை எழுதி நிரூபிக்கவும்.

Or

(b) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a convergent series. Prove that $\underset{n\to\infty}{lt}\ a_n = 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது ஒருங்கிணைந்த வரிசை எனில் $\underset{n\to\infty}{lt}\ a_n = 0$ காண்க.

14. (a) State and prove Abel's lemma.
அபெல்ஸ் லெம்மா தேற்றத்தை எழுதி நிரூபிக்கவும்.

Or

(b) State and prove Schwarz inequality.
ஷேவார்ஸ் அசமன்பாடு எழுதி நிரூபிக்கவும்.

15. (a) Prove that in any metric space $\langle M,P \rangle$ both M and the empty set ϕ are open.

மெட்ரிக் வெளி $\langle M,P \rangle$ ல், M மற்றும் வெற்றுக்கணம் ஆகிய இரண்டும் ϕ திறந்த கணங்கள் என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that the composition of two continuous functions is again continuous.
எந்த இரு தொடர்ச்சி சார்புகளின் சேர்ப்பும் ஒரு தொடர்ச்சி சார்பு என நிறுவுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Prove that the set R of all real numbers is uncountable.

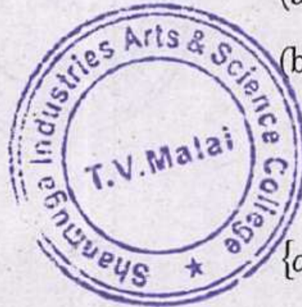
அனைத்து மெய்யெண்களின் தொகுப்பு R கணக்கிட முடியாதது என நிறுவுக.

17. Prove that the limit of the sum is the sum of the limits.

கூட்டலின் எல்லைகளானது எல்லைகளின் கூட்டலுக்கு சமம்.

18. If $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of positive numbers such that

(a) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$



(b) $\underset{n\to\infty}{lt}\ a_n = 0$ prove that the alternating series $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ an is convergent.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது நேர்மறை எண்களின் வரிசை எனில்,

(அ) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$

(ஆ) $\underset{n\to\infty}{lt}\ a_n = 0$ என்பது மாற்று வரிசை $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ என்பது ஒருங்கிணைவு எனக் காட்டுக.